UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Rapports de Recherche

N°1925

Programme 6

Calcul scientifique, Modélisation et Logiciel numérique

RESOLUTION PAR MULTIGRILLES STATIONNAIRES EN MAILLAGES NON STRUCTURES DES EQUATIONS D'EULER

Eric MORANO

Juin 1993

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

2004 route des Lucioles
B.P. 93
06902 Sophia-Antipolis
France

RESOLUTION PAR MULTIGRILLES STATIONNAIRES EN MAILLAGES NON STRUCTURES DES EQUATIONS D'EULER[1]

Eric MORANO
INRIA, 2004 route des Lucioles, 06902 Sophia Antipolis

depuis le 1er février 1993 :
ICASE, Mail Stop 132 c, NASA Langley Research Center, Hampton, VA 23665-5225, U.S.A.

Résumé

On contruit une méthode multigrilles appliquées à des problèmes complexes d'écoulements transsoniques visqueux ou non sur des maillages non–structurés et non–emboités. Les niveaux successifs sont construit par la méthode de déraffinement–nodal/reconnexion de H. Guillard. Les lisseurs sont de type Jacobi multi–pas ou Correction de Défaut "à la Hemker". On recherche dans quelles conditions une telle méthode est susceptible d'être de complexité $O(N)$, du point de vue théorique comme du point de vue pratique.

STEADY MULTI–GRID SOLUTION FOR COMPRESSIBLE FLOWS WITH UNSTRUCTURED MESHES

Abstract
We derive a multi–grid method which is applied to complex flows such as transonic inviscid and viscous ones computed on unstructured meshes, with non–embedded levels. The different levels are generated by H. Guillard node–coarsening/reconnection method. Smoothing schemes use multi–stage Jacobi sweeps or Defect–Correction "à la Hemker". We investigate in which condition we can obtain a $O(N)$ complexity, on the theoretical and on the practical level.

[1] Travail financé partiellement par la DRET (groupe 6)

Table des matières

1 INTRODUCTION

L'utilisation de maillages non structurés permet de représenter "facilement" des géométries complexes, mais a l'inconvénient d'être plus difficile à gérer dans les algorithmes de résolution (nombre de voisins d'un noeud variable, stockage d'informations plus important qu'en maillage structuré).

Une manière d'obtenir efficacement une solution sur un maillage ("grille fine" ou "maillage fin") est d'utiliser une méthode multigrille (MG). Une façon d'utiliser au mieux les méthodes MG est de faire appel à la technique **multigrille complète** (Full Multigrid, FMG). En effet, cette méthode permet d'obtenir une solution en $O(N)$ opérations seulement (où N est le nombre de sommets du maillage). Des démonstrations de cette propriété ont été faites notamment par Hackbusch [23] et, Hemker et Koren [29].

L'utilisation d'une méthode FMG repose sur les idées suivantes:

- La convergence d'une méthode MG est indépendante de la taille des mailles. Cette indépendance de maillage est la conséquence de deux propriétés [23, 24]:

  P1. **La propriété de lissage**, dont nous parlerons plus loin.

  P2. **La propriété d'approximation:** elle assure que la correction grille grossière remplit son rôle. Elle mesure la différence qui existe entre la solution sur la grille fine et la solution de la grille grossière obtenue à l'aide de la représentation de l'opérateur de lissage sur la grille grossière.

  On peut trouver d'autres démonstrations de la convergence d'une méthode multigrille indépendante de la taille des mailles chez Maitre et Musy [51] et chez McCormick [52].

- La solution sur la grille grossière est une bonne approximation de la solution sur la grille fine. Il faut notamment vérifier que les transferts jouent leur rôle sans trop perturber le signal transmis.

Les propriétés de la technique FMG sont souvent vérifiées dans le cas où les grilles sont emboîtées. Il faut donc les mettre en évidence dans notre cas où les grilles ne le sont pas strictement mais seulement **"noeuds emboîtés"**.

L'option choisie dans le cadre de notre étude est de produire une suite de niveaux grossiers à partir d'un maillage fin. Quand on utilise plusieurs maillages, cette suite de grilles grossières est construites selon des contraintes particulières:

- on doit respecter les mêmes frontières, à l'infini et sur le corps.
- un maillage doit être (de préférence partout dans le domaine) deux fois plus grossier d'un niveau à l'autre.

Ces maillages ont été générés par Guillard en appliquant un algorithme de déraffinement décrit en détail dans [22].

La faible régularité topologique des maillages utilisés nous amène à résoudre les équations d'Euler avec des méthodes itératives assez simples qui ne sont pas toujours assez efficaces. De plus, compte tenu du caractère hyperbolique des équations d'Euler, la qualité des lisseurs dépendra de la dissipation numérique ajoutée. Par ailleurs l'évaluation du coût FMG n'est réaliste que si le taux de réduction d'un cycle est petit ; le choix de la méthode de **relaxation de base** est donc important.

On peut distinguer, parmi les procédés itératifs de base, deux approches: les méthodes (pseudo-) instationnaires et les méthodes stationnaires. Parce qu'ils sont faciles d'emploi, de nombreux auteurs utilisent des schémas explicites. Par exemple, pour la résolution des équations d'Euler, Jameson et Mavriplis [53, 55], ou Peraire, Peiro, Morgan, Vahdati, Molina [62] (3D hypersonique) ou encore, Lallemand et Leclercq [41, 42, 46] font appel à des algorithmes multipas comme Runge Kutta 4 Jameson et Mavriplis résolvent aussi les équations de Navier-Stokes avec de tels algorithmes [30, 54, 56]. D'autres auteurs, comme Dick, Hemker, Spekreijse, utilisent des techniques de relaxation non linéaire [12, 13, 14, 29, 28, 65] pour la résolution des équations d'Euler, et Koren [32, 34, 35, 36] pour la résolution des équations de Navier-Stokes .

Pour améliorer encore la vitesse de convergence d'un solveur on peut utiliser un préconditionneur. En effet, un schéma explicite n'est pas préconditionné. Un schéma de Jacobi met en oeuvre un préconditionneur diagonal, que l'on inverse avec une méthode de Gauss. Une itération de Gauss-Seidel est préconditionnée par une matrice triangulaire, etc... En fait, un schéma explicite est souvent amélioré grâce à l'emploi de diverses techniques sophistiquées comme:

- Le pas de temps caractéristique mis au point par van Leer [68].
- Des méthodes de lissage de résidu, explicite utilisée par Goudjo [9] pour les équations d'Euler, et implicite développée par Jameson [30], et utilisée par Mavriplis [54, 55], étendue par Radespiel [63] pour les équations d'Euler et/ou de Navier-Stokes.

On va aussi chercher à obtenir des solutions précises à l'**ordre** 2. Une difficulté concernant les schémas centrés et/ou décentrés précis à l'ordre deux est que la méthode de Gauss-Seidel ne peut pas être appliquée directement [37], faute de diagonale dominance. Dans cette étude nous avons considéré deux façons de passer outre ce problème:

F1. utiliser la méthode du **Défaut Corrigé** (DeC) pour converger vers une solution précise à l'ordre 2, en utilisant des algorithmes de Gauss-Seidel ou de Jacobi pour inverser le problème d'ordre 1.

F2. appliquer directement un algorithme de **Jacobi multipas** pour lisser le problème d'ordre 2.

L'option F1 a été introduite dans [23, 27, 32, 36], en ce qui concerne un lisseur de Gauss-Seidel, et l'option F2 dans [58, 60, 10].

Dans cette étude on se préoccupera, pour des maillages non structurés, de construire un schéma multigrille avec les options particulières suivantes:

- Relaxation Stationnaire.

- Algorithme non linéaire (FAS).

- Technique FMG.

On peut aussi se référer aux travaux de [13, 14] pour des questions analogues traitées avec différentes options.

2 EQUATIONS D'EULER

2.1 Lois de conservation

Le système des équations d'Euler stationnaires en deux dimensions d'espace s'écrit en formulation conservative:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(W)_x \;+\; G(W)_y \;=\; 0 \\ + \text{ conditions aux limites} \end{array} \right. \tag{1}$$

avec:

$$W \;=\; \begin{pmatrix} \rho \\ \rho\; u \\ \rho\; v \\ E \end{pmatrix}$$

où ρ est la masse volumique, u et v sont les composantes du vecteur vitesse, et E est l'énergie totale par unité de volume. F et G sont les fonctions de flux, données par:

$$F(W) \;=\; \begin{pmatrix} \rho\; u \\ \rho\; u^2 \;+\; p \\ \rho\; u\; v \\ (E+p)\; u \end{pmatrix} \quad G(W) \;=\; \begin{pmatrix} \rho\; v \\ \rho\; u\; v \\ \rho\; v^2 \;+\; p \\ (E+p)\; v \end{pmatrix}$$

la pression p vérifie la loi d'état des gaz parfaits:

$$p = (\gamma - 1)\; \left(E - \frac{1}{2}\; \rho\; (u^2 + v^2) \right)$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques et vaut 1.4 .

2.2 Forme quasi-linéaire

En utilisant la dérivation des fonctions composées on peut écrire (1) sous la forme d'un système quasi-linéaire:

$$\left\{ \begin{array}{c} F'(W)\; W_x \;+\; G'(W)\; W_y \;=\; 0 \\ + \text{ conditions aux limites} \end{array} \right. \tag{2}$$

Les fonctions F et G sont homogènes de degré 1 en W, ce qui sera utilisé par la suite dans la linéarisation des flux. On peut aussi écrire (1) sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{c} (F'(W).W)_x \;+\; (G'(W).W)_y \;=\; 0 \\ + \text{ conditions aux limites} \end{array} \right. \tag{3}$$

Le système quasi-linéaire (2) est dit hyperbolique car la matrice P définie par:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P \;=\; P(W,\eta_1,\eta_2) & = & \eta_1\; F'(W) \;+\; \eta_2\; G'(W) \\ \overrightarrow{\eta} & = & (\eta_1,\eta_2) \;\in\; I\!R^2 \text{ et } W \;\in\; I\!R^4 \end{array} \right. \tag{4}$$